MA 2223 ALG 3. ABRIL-JULIO 2006.
PROBLEMARIO 3

1. Sea V un espacio con producto interno y U, W subespacios. Probar, e ilustrar con subespacios de $\mathbf{R}^3$: (a). $W \subseteq (W^\perp)^\perp$, con igualdad si W es de dimensión finita. (b) Si $U \subseteq W$ entonces $W^\perp \subseteq U^\perp$. (c) $U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$. (d)$U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$, con igualdad si V es de dimensión finita.

2. Sea $V = W_1 \oplus W_2$, y sea $P_1 : V \to V$ la proyección sobre W_1. Probar que $Id - P_1$ es la proyección sobre W_2, donde $Id : V \to V$ es la identidad. (Aqui, V denota un espacio vectorial cualquiera, no necesariamente con producto interno, y W_1, W_2 subespacios).

3. Con V como en la pregunta anterior, sea $P_i, i = 1, 2$, transformaciones lineales tales que $P_i^2 = P_i$, $i = 1, 2$. (Tales operadores lineales se llaman *operadores de proyección*). Suponga que $P_1 + P_2 = Id$ y $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$. Probar que $V = Im(P_1) \oplus Im(P_2)$. Enunciar y probar la recíproca de este teorema.

4. La suma directa externa. Sean V, W espacios vectoriales. Se define un espacio S como sigue: como conjunto, los elementos de V son pares ordenados $(\vec{v}, \vec{w}), \vec{v} \in V, \vec{w} \in W$. Si λ es un escalar, se define $\lambda(\vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{v}, \lambda\vec{w})$ y se define $(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}', \vec{w}') = (\vec{v} + \vec{v}', \vec{w} + \vec{w}')$. Probar que con estas operaciones S es un espacio vectorial, que los sunconjuntos $V' = \{(\vec{v}, \vec{0}), \vec{v} \in V\}$, y $W' = \{(\vec{0}, \vec{w}), \vec{w} \in W\}$ son subespacios, isomorfos a V, W respectivamente, y que $S = V' \oplus W'$, donde aqui la suma directa es la definida en clase. S se llama *la suma directa externa* de V y W. La suma directa definida en clase se llama *la suma directa interna*. Mostrar que si $V = W_1 \oplus W_2$ (suma direct interna) entonces V es ismorfo a la suma directa externa de W_1 y W_2. Debido a este isomorfismo, se suele no distinguir entre sumas directas externas e internas.

5. Sea V, W espacios vectoriales de dimensión finita y sea $V = V_1 \oplus V_2$. Probar que $Hom(V, W)$ es isomorfo con $Hom(V_1, W) \oplus Hom(V_2, W)$.

6. Hallar, o por lo menos convencerse que se sepa hallar, la solución mínimos cuadrados al sistema $X + Y = 4, X - Y = 0, 2X + 3Y = 11$.

7. (a) Sea $W = span\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\} \subset \mathbf{R}^4$. Calcular $proj_W : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$. (b) Lo mismo para $W = span\{(2, 4, 3, 1)\}$. Calcular significa escribir las matrices en la base standard.

8. Sea A una matriz ortogonal. Probar $\det A = \pm 1$. Probar que todo autovalor real de A es ± 1. Sea U una matriz unitaria, Probar $|\det U| = 1$.

9. Probar que proyecciones ortogonales son autoadjuntos.

10. Sea V, un espacio real con producto interno, de dim.n, y sea W un subespacio de dimensión $n - 1$. La *reflexión en* W es la unica transformación $R : V \to V$ que es la identidad en W y menos la identidad en $W^\perp$. Ilustrar en $\mathbf{R}^3$. Sea $\vec{n}$ una base de $W^\perp$. Probar que, para todo $\vec{v} \in V$, $R(\vec{v}) = \vec{v} - 2\frac{<\vec{v}, \vec{n}>}{<\vec{n}, \vec{n}>}\vec{n}$. Probar que R es una transformación ortogonal y $\det R = -1$.